2.6. Задача двух тел

Рассмотрим две материальные точки с массами M_1 и M_2 в силовом поле с потенциальной энергией $V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ (включающей и взаимодействие частиц друг с другом). В общем случае в стационарном уравнении Шредингера для такой системы

$$-\frac{\hbar^2}{2M_1}\boldsymbol{\nabla}_1^2\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)-\frac{\hbar^2}{2M_2}\boldsymbol{\nabla}_2^2\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)+V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=E\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2),$$

где $\boldsymbol{\nabla}_1 \equiv \boldsymbol{\nabla}_{r_1}$, $\boldsymbol{\nabla}_2 \equiv \boldsymbol{\nabla}_{r_2}$, переменные $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ разделить невозможно. Если же частицы взаимодействуют *только друг с другом*, т. е. внешние силы *отсутствуют*, то $V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ зависит только от расстояния между частицами,

$$V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=V(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2), \tag{2.53}$$

и ситуация существенно упрощается. Исследуем именно этот случай.

Рассмотрим двухчастичное уравнение Шредингера с потенциалом (2.53):

$$-\frac{\hbar^2}{2M_1}\boldsymbol{\nabla}_1^2\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)-\frac{\hbar^2}{2M_2}\boldsymbol{\nabla}_2^2\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)+V(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)= \\ =E\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2). \tag{2.54}$$

В нем удобно перейти к новым переменным $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$, связанным с $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ соотношениями:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2, \qquad \boldsymbol{R}=\frac{M_1\boldsymbol{r}_1+M_2\boldsymbol{r}_2}{M_1+M_2}. \tag{2.55}$$

В классической механике $\boldsymbol{r}$ является относительной *координатой* материальных точек, $\boldsymbol{R}$ — координатой их *центра масс*; преобразование (2.55) называется переходом в *систему центра масс*.

Запишем уравнение (2.54) в системе центра масс. Для этого выразим операторы $\boldsymbol{\nabla}_1$ и $\boldsymbol{\nabla}_2$ через $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}$ и $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{R}}$:

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_1}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{r}_1}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\boldsymbol{r}_1}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}}\overset{(2.55)}{=}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}+\frac{M_1}{M_1+M_2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}},$$
$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_2}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\boldsymbol{r}_2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\boldsymbol{r}_2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}}\overset{(2.55)}{=}-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}+\frac{M_2}{M_1+M_2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}},$$

откуда, в силу независимости частных производных от порядка дифференцирования, имеем:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_1^2&=\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{r}_1^2}=\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{r}^2}+\frac{2M_1}{M_1+M_2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{r}\,\partial\boldsymbol{R}}+\left(\frac{M_1}{M_1+M_2}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{R}^2},\\ \boldsymbol{\nabla}_2^2&=\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{r}_2^2}=\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{r}^2}-\frac{2M_2}{M_1+M_2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{r}\,\partial\boldsymbol{R}}+\left(\frac{M_2}{M_1+M_2}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{R}^2}.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Будем искать решение уравнения (2.54) в виде

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \psi(\boldsymbol{r})\Phi(\boldsymbol{R}). \tag{2.57}$$

После подстановки (2.56) и (2.57) в (2.54) и деления обеих частей уравнения на (2.57) получаем уравнение с *разделенными* переменными $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{R}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\boldsymbol{\nabla}_r^2\psi(\boldsymbol{r})}{\psi(\boldsymbol{r})} + V(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar^2}{2M}\frac{\boldsymbol{\nabla}_R^2\Phi(\boldsymbol{R})}{\Phi(\boldsymbol{R})} - E, \tag{2.58}$$

где

$$M = M_1 + M_2; \qquad m = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \tag{2.59}$$

— соответственно *полная* и *приведенная* массы частиц. Независимость координат $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{R}$ приводит к тому, что обе части уравнения (2.58) обращаются в некоторую константу ε. В результате приходим к двум *независимым* уравнениям для функций $\psi(\boldsymbol{r})$ и $\Phi(\boldsymbol{R})$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}_r^2\psi(\boldsymbol{r}) + V(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) = \varepsilon\psi(\boldsymbol{r}); \tag{2.60}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\boldsymbol{\nabla}_R^2\Phi(\boldsymbol{R}) = \varepsilon'\Phi(\boldsymbol{R}); \tag{2.61}$$

$$E = \varepsilon + \varepsilon'.$$

Мы получаем существенное упрощение задачи по сравнению с (2.54).

Дадим интерпретацию уравнений (2.60), (2.61). Уравнение (2.60) является *одночастичным* стационарным уравнением Шредингера для *фиктивной* частицы с массой μ (уравнение движения частицы с приведенной массой). Уравнение (2.61) — это тоже *одночастичное* стационарное уравнение Шредингера, но для *свободного* движения *фиктивной* частицы с массой M (уравнение движения центра масс, или *переносного* движения). Таким образом, в квантовой механике задача двух тел решается в полной аналогии с задачей двух тел в классической механике, т. е. переходом из лабораторной системы отсчета в систему центра масс, только вместо уравнения Ньютона используется уравнение Шредингера.

Отметим в заключение, что если массы частиц различаются существенно (например, $M_1 \ll M_2$), то влияние легкой частицы на движение тяжелой будет пренебрежимо малым: $m \approx M_1$ и $M \approx M_2$.